ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.

Kostrub I.D. ON GENERALIZATION OF THEOREM OF OSTROWSKI AND SCHNEIDER

The theorem of Ostrowski and Schneider is transferred to the Hilbert space of arbitrary dimension.

Key words: linear bounded operator; spectrum of operator; self-adjont operator; direct sum of invariant subspaces; span between subspaces.

УДК 517.929

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© **Е.В. Кошкин**

Ключевые слова: стабилизация; линейные периодические системы дифференциальных уравнений с последействием; аппроксимирующие операторы; управление по обратной связи.

Рассматривается задача стабилизации линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием и квадратичным критерием качества. Установлена связь аппроксимирующей ее задачи стабилизации с задачей оптимальной стабилизации автономной линейной системы разностных уравнений.

Рассматривается управляемая линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(t,\theta)x(t+\theta) + B(t)u, \ t \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty), \tag{1}$$

в которой $x:[-\tau,+\infty)\to\mathbb{R}^m$; ω-периодическая по первому аргументу, матричнозначная функция η при каждом фиксированном значении второго аргумента $\theta\in[-\tau,0]$ интегрируема по Лебегу на $(0,\omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t\in(0,\omega]$ имеет ограниченную вариацию $var_{[-\tau,0]}\eta(t,\cdot)$ интегрируемую на $(0,\omega]$, $\eta(t,0)=0$, $t\in(0,\omega]$; $u\in\mathbb{R}^r$; $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m\times r}$ — ω-периодическая матричная функция интегрируемая на $(0,\omega]$. В дальнейшем, будем полагать, что $0<\tau\leqslant\omega$.

Множество допустимых управлений U состоит из управлений, формируемых по принципу обратной связи. Эти управления моделируются функциями $u=u\,(t+\omega,x_t(\cdot)) = u\,(t,x_t(\cdot))\in\mathbb{R}^r$, где $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-\tau,0]$, $t\in\mathbb{R}^+$. В множестве допустимых управлений U, формируемых по принципу обратной связи, требуется найти управление u^0, стабилизирующее систему (1) с наименьшим значением показателя качества переходных процессов:

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(x^T(t)C_1(t)x(t) + u^T(t)C_2(t)u(t)\right)dt, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — ω-периодические непрерывные матричные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Используя разбиение отрезка $[0,\omega]$ $0=t_0<t_1<\ldots<t_I=\omega$, для оператора $F:C([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m)\to L((0,\omega],\mathbb{R}^m)$, определяемого формулой $(Fx)(t)=\int_{-\tau}^{0}d\eta(t,\theta)x(t+\theta)$, $t\in(0,\omega]$, можно предложить последовательность сильно сходящихся к нему аппроксимирующих операторов $\{F_I\}_1^{+\infty}$, $F_I:C([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m)\to L([0,\omega],\mathbb{R}^m)$, $I\geqslant 1$, определяемых следующим образом

$$(F_I x)(t)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K_i}A_{ik}(t)\chi_{[t_{i-1},t_i)}(t)\int\limits_{t_i-\tau}^{t_{i-1}}d\eta_{ik}(s)x(s),\ t\in(0,\omega]. \tag{3}$$

Здесь A_{ik} — ω-периодические матричнозначные функции интегрируемые по Лебегу на $(0,\omega]$; η_{ik} — матричнозначные функции с ограниченными вариациями на $[-\tau,\omega]$; $\eta_{ik}(\omega)=$ $=0$, $1\leqslant k\leqslant K_i$, $1\leqslant i\leqslant I$.

С учетом специальной формы представления операторов F_I, целесообразно сузить множество допустимых управлений U, используя для моделирования управлений кусочно-постоянные векторные функции

$$u=u\left(t,x(t+\cdot)\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{I}\chi_{[t_{i-1},t_i)}(t)\hat{u}_i\left(x(n\omega+\cdot)\right),t\in[0,\omega],\ n\geqslant 0, \tag{4}$$

определяемые непрерывными отображениями $\hat{u}_i(\cdot):C([-\tau,0],\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^r$, $1\leqslant i\leqslant I$.

Для выбранного множества допустимых управлений аппроксимирующая задача стабилизации эквивалентна задаче оптимальной стабилизации линейной автономной системы разностных уравнений вида [1].

$$y_n=\mathcal{A}y_{n-1}+\mathcal{B}\hat{u}_n,\ n\geqslant 0, \tag{5}$$

с критерием качества

$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(y_{n-1}^T\mathcal{G}_1y_{n-1}+y_{n-1}^T\mathcal{G}_{12}\hat{u}_n+\hat{u}_n^T\mathcal{G}_{12}^Ty_{n-1}+\hat{u}_n^T\mathcal{G}_3\hat{u}_n\right). \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (5), (6) *существует оптимальное стабилизирующее управление* $\hat{u}_n^0=\hat{u}^0(y_{n-1})$, $n\geqslant 0$. *Тогда стабилизирующее управление непрерывной задачи, аппроксимирующей задачу* (1), (2), *с множеством допустимых управлений* (4) *определяется формулами*

$$u^0=\sum_{i=1}^{I}\chi_{(t_{i-1},t_i]}(t-n\omega)\ \hat{u}_i^0\Bigg(x(n\omega),\int\limits_{t_1-\tau}^{0}d\eta_{1k_{11}}(s)x(n\omega+s),\ldots,\int\limits_{t_1-\tau}^{0}d\eta_{1k_{1dim(\mathcal{K}_1^-)}}(s)x(n\omega+s),\ldots$$
$$\ldots,\int\limits_{t_{I_-}-\tau}^{0}d\eta_{(I_-)k_{(I_-)1}}(s)x(n\omega+s),\ldots,\int\limits_{t_{I_-}-\tau}^{0}d\eta_{(I_-)k_{(I_-)dim(\mathcal{K}_{I_-}^-)}}(s)x(n\omega+s)\Bigg),$$

где $k_{ij}\in\mathcal{K}_i^-$, $1\leqslant i\leqslant I_-$, $n\omega<t\leqslant(n+1)\omega$, $n\geqslant 0$. *Здесь* $\mathcal{K}_i^-=\left\{k=\overline{1,K_i}:\int_{t_i-\tau}^{0}d\eta_{ik}(s)x(s)\neq 0\right\}$, $I_-=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant I}(t_i<\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 87-98.

Koshkin E.V. FINITE APPROXIMATIONS FOR STABILIZATION PROBLEM OF PERIODIC SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

Stabilization problem for linear periodic system of differential equations with aftereffect and quadratic performance criterion is considered. Relation between it's stabilization approximating problem and the same one for autonomous linear system of difference equations is obtained.

Key words: optimal stabilization; systems of linear periodic differential equations with aftereffect; approximating operators; feedback control.

УДК 517.929

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **А.Ю. Куликов**

Ключевые слова: разностные уравнения; уравнения с запаздыванием; устойчивость.

Для системы разностных уравнений с переменной матрицей коэффициентов и одним переменным запаздыванием получены достаточные признаки устойчивости, выраженные в терминах оценок ее функции Коши.

Обозначим $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\Delta_{\mathbb{N}}=\{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2 : n\geqslant m\}$, $\mathbb{Z}_-=\{n\in\mathbb{Z}: n\leqslant 0\}$, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathbb{C}^r$ — r-мерное комплексное пространство, $\mathbb{C}^{r\times r}$ — пространство комплексных матриц, размерности $r\times r$. Символом $|\cdot|$ будем обозначать норму r-мерного вектора и согласованную с ней норму $r\times r$-матрицы.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1)-x(n)+A(n)x(n-h(n))=0, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $A:\mathbb{N}_0\to\mathbb{C}^{r\times r}$ — матрица-функция; $h:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$.

Функция Коши (*фундаментальное решение*) (см. [1], [2]) системы (1) есть матрица-функция $K:\Delta_{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{r\times r}$, которая при каждом $m\in\mathbb{N}_0$ является решением системы

$$K(n+1,m)-K(n,m)=-A(n)K(n-h(n),m), \quad n\geqslant m,$$

с начальными условиями $K(m,m)=E$, $K(n,m)=\Theta$, $n<m$, где E и Θ — соответственно, единичная и нулевая $r\times r$-матрицы.

Решение системы (1) с начальной функцией $\xi:\mathbb{Z}_-\to\mathbb{C}^r$ имеет представление

$$x(n)=K(n,0)\xi(0)-\sum_{i=0}^{n-1}K(n,i+1)A(i)\xi^*(i-h(i)), \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

где $\xi^*(i)=\xi(i)$ при $i<0$ и $\xi^*(i)=0$ при $i\geqslant 0$, в силу которого, устойчивость уравнения (1) определяется асимптотическими свойствами функции Коши.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A(n)|<\infty$. *Тогда функция Кощи уравнения* (1) *равномерно ограничена, т. е. при некотором* $M>0$ *для любых* $(n,m)\in\Delta_{\mathbb{N}}$ *выполнено неравенство*

$$|K(n,m)|\leqslant M,$$